Úloha 1: *Hrad so štvorcovou podstavou je obkolesený z každej strany vodnou priekopou so šírkou 10 m. Nepriateľské vojsko sa chce dostať do hradu, ale má iba zopár dosiek, z ktorých každá má dĺžku 9,5 m. Ako sa dostane dnu?*

Riešenie: Keďže máme dosky (zámerne nebol uvedený ich počet), ktoré sú kratšie ako šírka vodnej priekopy, môžeme začať špekulovať nad

(i) hľadaním ťažiska sústavy na seba naukladaných dosiek,

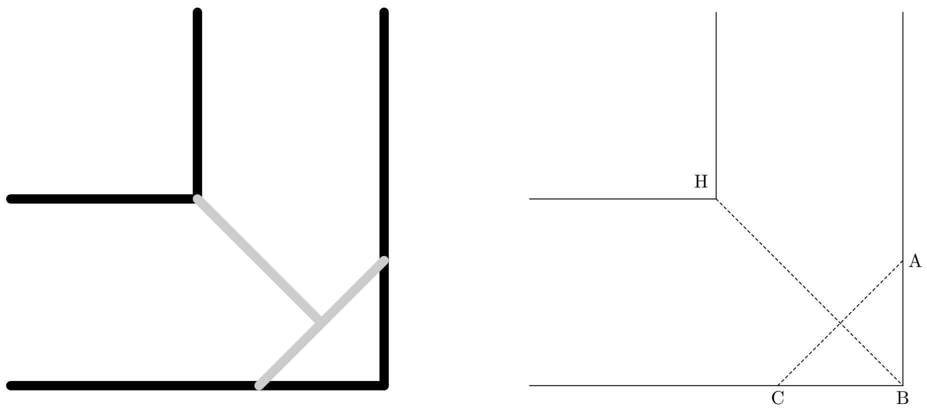
(ii) vážením vojakov, ktorí sa postavia na dosku na brehu, aby tí ďalší mohli po nej prejsť,

(iii) hĺbením jarku, ktorým voda z priekopy vytečie,

(iv) povolaním Mojžiša, ktorý rozdelí vodu (možno by stačil aj Martin Mojžiš :)),

(iv) postavením plte, katapultu, atď...

Alebo upustíme od nepodstatných omáčok okolo zadania a pozrieme sa na vec ako matematici. Pomôžeme si geometricky (štvorcovým pôdorysom hradu a priekopy). Použijeme k tomu jeden z rohov (vzhľadom na symetriu je jedno, ktorý zo 4 rohov si zvolíme). Jedno konkrétne grafické riešenie je na Obr. 1 vľavo. Situácia sa dá skomplikovať použitím viacerých dosiek, čo by však zbytočne skomplikovalo aj výpočtovú (dôkazovú) časť. K takému riešeniu by sme sa uchýlili v prípade, keby to nešlo s dvoma doskami. Pri riešení s dvoma doskami nám stačí urobiť kružnicu so stredom v rohu hradu s polomerom 9,5 a posúvame druhú dosku (umiestnenú ako je na obrázku) v rohu priekopy až dovtedy, kým nám nepretne túto kružnicu (z praktických dôvodov sa jej nestačí len dotknúť!). Treba však overiť, že sa to takto pri našich rozmeroch (v metroch) naozaj dá urobiť.



Obr. 1: Grafický náčrt riešenia úlohy

Viacerí riešitelia dodali práve jedno riešenie v podobe konkrétneho položenia dosiek, najčastejšie určením vzdialenosti dosky od rohu priekopy, resp. určením výšky pravouhlého trojuholníka v rohu priekopy s doskou ako preponou. Úloha má však už aj v realizácii s dvoma doskami nekonečne veľa riešení (áno, áno, všetci "praktici" ma určite za túto vetu sfúknu, no matematicky je to tak). Veď sledujte!

Najprv si uvedomme, že vzdialenosť rohov $r = |HB|$ je podľa Pytagorovej vety $r = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$. Oproti dĺžke dosky je to vzdialenosť väčšia o hodnotu $h = r - 9{,}5$, ktorú treba prekonať umiestnením druhej dosky v rohu priekopy. Najjednoduchšie bude, ak ďalej budeme uvažovať rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC s dĺžkou odvesien $a > 0$ umiestnený v rohu priekopy (pozri Obr. 1 vpravo). Potom podľa Pytagorovej vety pre dĺžku jeho prepony p platí

$$p = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a < 9{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{9{,}5}{\sqrt{2}} = 19\,\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Pre výšku v v trojuholníku ABC platí, že $v = \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$, pretože je to polovica z uhlopriečky štvorca so stranou a. Avšak veľkosť výšky sčítaná s veľkosťou dosky musia stačiť na premostenie rohov, a teda

$$v + 9{,}5 > r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\,a + 9{,}5 > 10\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a > 20 - 19\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Takto jednoducho sme určili všetky prípustné hodnoty nášho pohľadu na vec, t.j.

$$a \in \left(20 - 19\frac{\sqrt{2}}{2}, 19\,\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Poznámka: Môžeme postrehnúť, že úloha neumožňuje veľkú voľnosť pri určení hodnoty a (kam na breh umiestniť dosku od rohu priekopy), pretože ide o relatívne malý interval, približne od hodnoty 6,565 po hodnotu 6,7175, teda len v rozmedzí necelých 15 cm! Preto sme pri riešeniach chceli aj nejaký číselný údaj, aby sme si mohli rýchlo overiť, či je riešenie správne. Hoci myšlienka umiestnenia jednej dosky diagonálne cez roh priekopy je veľmi jednoduchá, už pri malej zmene rozmerov priekopy a dosky (napr. 10 m a 9,4 m!) by úloha pomocou dvoch dosiek nebola riešiteľná.